

QMexico Summer School

QBronze 1.2

Sistemas cuánticos básicos

Basics of Quantum Systems

30 Mayo 2026

Material final para estudiantes · Notación matemática en \LaTeX

La sesión organiza los conceptos en una secuencia matemática progresiva. Cada bloque introduce una definición, fija la convención de notación y resuelve ejercicios con pasos explícitos.

La convención común de las cinco presentaciones es usar vectores columna, producto tensorial de izquierda a derecha y amplitudes reales salvo que se indique lo contrario.

MAPA

1. Qubits reales
2. Regla de Born
3. Estados válidos
4. Hadamard
5. Medición y conteos
6. Qiskit básico

Un qubit real se escribe como combinación lineal de dos estados base. Sus coeficientes son amplitudes, no probabilidades directas.

NOTACIÓN

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Identifica amplitudes por la posición del ket.

PASOS

1. Coeficiente de $|0\rangle$: α .
2. Coeficiente de $|1\rangle$: β .
3. No sumes amplitudes como probabilidades.

Para $|\psi\rangle = 0.43|0\rangle - 0.90|1\rangle$, identifica amplitudes.

SOLUCIÓN

$$\alpha = 0.43, \quad \beta = -0.90.$$

La amplitud de $|1\rangle$ es -0.90 .

La base computacional de un qubit es $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. En vectores columna, cada ket corresponde a un vector base.

NOTACIÓN

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Convierte entre kets y vectores antes de multiplicar matrices.

PASOS

1. Escribe $|0\rangle$ y $|1\rangle$ como columnas.
2. Combina linealmente con amplitudes.
3. Lee la primera entrada como amplitud de $|0\rangle$.

Escribe $\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$ como vector.

SOLUCIÓN

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

La regla de Born transforma amplitudes en probabilidades.
Para amplitudes reales, se eleva al cuadrado.

NOTACIÓN

$$\mathbb{P}(0) = \alpha^2, \quad \mathbb{P}(1) = \beta^2$$

No confundir amplitud con probabilidad.

El signo de la amplitud se pierde al medir en la base computacional.

PASOS

1. Identifica la amplitud.
2. Eleva al cuadrado.
3. Interpreta el resultado como probabilidad.

Si la amplitud de $|1\rangle$ es -0.90 , calcula la probabilidad de observar 1.

SOLUCIÓN

$$\mathbb{P}(1) = (-0.90)^2 = 0.81.$$

Un estado cuántico válido debe tener norma uno. Para amplitudes reales, la suma de cuadrados debe ser uno.

NOTACIÓN

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

La condición no es $\alpha + \beta = 1$. Esa sería una condición de probabilidades clásicas.

PASOS

1. Elevar al cuadrado cada amplitud real.
2. Sumar los cuadrados.
3. El vector es válido si la suma es 1.
4. Los signos negativos sí son permitidos en amplitudes; desaparecen al elevar al cuadrado para probabilidades.

¿Es válido $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)^T$ como estado cuántico?

SOLUCIÓN

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 1.$$

No es válido.

Un vector cuántico puede tener entradas negativas.
Lo que importa es la suma de cuadrados.

NOTACIÓN

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \sum_i a_i^2 = 1$$

Valida sin descartar signos negativos.

PASOS

1. Elevar al cuadrado cada amplitud real.
2. Sumar los cuadrados.
3. El vector es válido si la suma es 1.
4. Los signos negativos sí son permitidos en amplitudes; desaparecen al elevar al cuadrado para probabilidades.

Revisa $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)^T$.

SOLUCIÓN

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 + 0 = 1.$$

Es válido.

Un vector falla si la suma de cuadrados no es uno, aunque sus entradas parezcan razonables.

NOTACIÓN

$$\sum_i a_i^2 \neq 1 \Rightarrow \text{no es estado normalizado}$$

El criterio es numérico y directo.

PASOS

1. Elevar al cuadrado cada amplitud real.
2. Sumar los cuadrados.
3. El vector es válido si la suma es 1.
4. Los signos negativos sí son permitidos en amplitudes; desaparecen al elevar al cuadrado para probabilidades.

Revisa $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)^T$.

SOLUCIÓN

$$4 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \neq 1.$$

No es válido.

Todo qubit real normalizado puede representarse en el círculo unitario mediante un ángulo.

NOTACIÓN

$$|\psi\rangle = \cos(x) |0\rangle + \sin(x) |1\rangle$$

El ángulo describe amplitudes, no probabilidades.

PASOS

1. Amplitud de $|0\rangle$: $\cos x$.
2. Amplitud de $|1\rangle$: $\sin x$.
3. Probabilidades: cuadrados.

Si el ángulo es x , calcula $\mathbb{P}(0)$.

SOLUCIÓN

$$\mathbb{P}(0) = |\cos x|^2 = \cos^2 x.$$

Los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$ tienen las mismas probabilidades de medición en la base computacional, pero difieren por un signo relativo.

NOTACIÓN

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

El signo relativo será importante cuando otra operación produzca interferencia.

PASOS

1. Escribe amplitudes.
2. Eleva al cuadrado para probabilidades.
3. Conserva signos para operaciones posteriores.

Mide $|-\rangle$ en la base $|0\rangle, |1\rangle$.

SOLUCIÓN

$$\mathbb{P}(0) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(1) = \frac{1}{2}.$$

Hadamard convierte la base computacional en la base $|+\rangle, |-\rangle$.

NOTACIÓN

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplica la matriz por el vector base correspondiente.

PASOS

1. Sustituye $|0\rangle$ o $|1\rangle$ por columna.
2. Multiplica por H .
3. Reescribe el resultado como ket.

Calcula $H|1\rangle$.

SOLUCIÓN

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = |-\rangle.$$

Hadamard es su propia inversa. Aplicarlo dos veces devuelve el estado original.

NOTACIÓN

$$H^2 = I$$

Esta propiedad explica por qué una medición intermedia cambia el comportamiento del circuito.

PASOS

1. Aplica H una vez.
2. Aplica H de nuevo.
3. Verifica que recuperas el ket inicial.

Calcula $H|+\rangle$.

SOLUCIÓN

$$H|+\rangle = H(H|0\rangle) = H^2|0\rangle = |0\rangle.$$

La compuerta X intercambia $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Es el análogo cuántico de NOT.

NOTACIÓN

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplica X por multiplicación matriz-vector o por regla directa.

PASOS

1. $X |0\rangle = |1\rangle$.
2. $X |1\rangle = |0\rangle$.
3. En Qiskit: `qc.x(q[0])`.

¿Qué código aplica NOT al primer qubit de un registro q ?

SOLUCIÓN

```
qc.x(q[0])
```

Si se inicia en $|0\rangle$ y se aplica X , el estado queda exactamente en $|1\rangle$.

NOTACIÓN

$$X |0\rangle = |1\rangle$$

En una simulación ideal, medir 1024 veces produce siempre el resultado 1.

PASOS

1. Estado inicial: $|0\rangle$.
2. Aplica X : $|1\rangle$.
3. Mide: resultado 1 con probabilidad 1.

Predice los conteos de 1024 mediciones tras $X|0\rangle$.

SOLUCIÓN

Resultado ideal:

$$\{ '1' : 1024 \}.$$

Un divisor de haz ideal envía un fotón a dos salidas con probabilidades iguales. Es una realización física de una moneda cuántica balanceada.

NOTACIÓN

$$\mathbb{P}(\text{reflejado}) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(\text{transmitido}) = \frac{1}{2}$$

La salida individual es una de las dos posibilidades; las probabilidades se observan estadísticamente.

PASOS

1. Identifica las dos salidas.
2. Asigna probabilidad $1/2$ a cada una.
3. Repite muchas veces para ver frecuencias.

¿Qué ocurre cuando un fotón pasa por un beam splitter ideal?

SOLUCIÓN

Se refleja con probabilidad $1/2$ y se transmite con probabilidad $1/2$.

Para crear $|-\rangle$ desde $|0\rangle$, primero se aplica X para obtener $|1\rangle$ y después H .

NOTACIÓN

$$HX|0\rangle = H|1\rangle = |-\rangle$$

La segunda operación debe ser Hadamard.

PASOS

1. Inicio: $|0\rangle$.
2. $X|0\rangle = |1\rangle$.
3. $H|1\rangle = |-\rangle$.

Después de `qc.x(q[0])`, ¿qué línea crea $|-\rangle$?

SOLUCIÓN

```
qc.h(q[0])
```

Qiskit muestra cadenas de bits con el bit clásico de mayor índice a la izquierda. Si sólo q_0 está en 1, la cadena mostrada suele ser 01.

NOTACIÓN

$$q_1 q_0 = 01 \quad \text{cuando} \quad q_1 = 0, q_0 = 1$$

No confundas el orden visual de la cadena con el índice del qubit en el código.

PASOS

1. Identifica qué qubit cambia.
2. Mapea qubits a bits clásicos.
3. Lee la cadena de derecha a izquierda respecto a índices crecientes.

Si se aplica X a q_0 en dos qubits inicializados en 00, ¿qué cadena aparece?

SOLUCIÓN

Estado físico: $q_1q_0 = 01$. Conteo ideal para 100 disparos:

$$\{ '01' : 100 \}.$$

Un circuito básico se compone de registro cuántico, registro clásico, operaciones y medición.

NOTACIÓN

estado $\xrightarrow{\text{compuertas}}$ estado final $\xrightarrow{\text{medición}}$ conteos

Lee el código línea por línea; las compuertas modifican qubits, la medición llena bits clásicos.

PASOS

1. Crear registro cuántico.
2. Crear registro clásico.
3. Aplicar compuertas.
4. Medir.
5. Simular.

Explica el papel de `qc.measure(q[0], c[0])`.

SOLUCIÓN

Mide el qubit q_0 y guarda el resultado clásico en c_0 .

Los conteos son frecuencias de medición tras repetir el circuito un número de veces. En un estado determinista, todos los conteos caen en una sola cadena.

NOTACIÓN

$$\text{shots} = N \Rightarrow \sum_s \text{counts}[s] = N$$

Comprueba que la suma de conteos coincida con el número de disparos.

PASOS

1. Identifica probabilidades ideales.
2. Multiplica por el número de disparos.
3. Espera fluctuaciones salvo en casos deterministas.

Si $\mathbb{P}(0) = \mathbb{P}(1) = 1/2$ y hay 1024 disparos, ¿qué esperas?

SOLUCIÓN

Aproximadamente 512 y 512, con fluctuaciones: por ejemplo { '0' : 522, '1' : 502 }.

Cuando se pregunta por amplitud, no se eleva al cuadrado. La amplitud conserva signo.

NOTACIÓN

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \Rightarrow \text{amplitud de } |1\rangle = b$$

Distingue claramente entre amplitud y probabilidad.

PASOS

1. Localiza el ket solicitado.
2. Toma su coeficiente.
3. No calcules cuadrados salvo que se pidan probabilidades.

En $|\psi\rangle = 0.43|0\rangle - 0.90|1\rangle$, ¿cuál es la amplitud de $|1\rangle$?

SOLUCIÓN

La amplitud es -0.90 .

La probabilidad correspondiente sería 0.81 , pero eso no es la amplitud.

Los estados $|+\rangle$ y una mezcla 50/50 de $|0\rangle$ y $|1\rangle$ dan las mismas frecuencias en una medición, pero no son el mismo objeto.

NOTACIÓN

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \neq \text{mezcla clásica}$$

La diferencia aparece al aplicar otra operación antes de medir.

PASOS

1. Calcula medición directa.
2. Aplica H antes de medir.
3. Observa que $H|+\rangle = |0\rangle$.

¿Qué se obtiene al aplicar H a $|+\rangle$ y medir?

SOLUCIÓN

$$H|+\rangle = |0\rangle \Rightarrow \mathbb{P}(0) = 1.$$

Los signos de las amplitudes pueden producir cancelaciones. Esta es una diferencia central frente a probabilidades clásicas no negativas.

NOTACIÓN

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \quad \text{vs.} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

No elimines signos antes de terminar las operaciones unitarias.

PASOS

1. Mantén amplitudes con signo.
2. Aplica matrices.
3. Sólo al medir calcula cuadrados.

Calcula $H|-\rangle$.

SOLUCIÓN

$$H|-\rangle = H(H|1\rangle) = |1\rangle.$$

Un estado de n qubits tiene 2^n amplitudes.
La normalización suma los cuadrados de todas.

NOTACIÓN

$$|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} a_i |i\rangle, \quad \sum_i a_i^2 = 1$$

Para validar, trabaja con todos los términos presentes, no sólo con los no nulos.

PASOS

1. Elevar al cuadrado cada amplitud real.
2. Sumar los cuadrados.
3. El vector es válido si la suma es 1.
4. Los signos negativos sí son permitidos en amplitudes; desaparecen al elevar al cuadrado para probabilidades.

Valida $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$.

SOLUCIÓN

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

Es válido.

Dos qubits independientes se combinan por producto tensorial.
Las amplitudes conjuntas son productos de amplitudes individuales.

NOTACIÓN

$$(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle$$

Expande distributivamente y conserva el orden de kets.

PASOS

1. Multiplica primer término con ambos del segundo.
2. Multiplica segundo término con ambos del segundo.
3. Ordena como 00, 01, 10, 11.

Expande $|+\rangle \otimes |0\rangle$.

SOLUCIÓN

$$|+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}.$$

El espacio de estados de n qubits tiene dimensión 2^n .
Cada cadena binaria de longitud n es un estado base.

NOTACIÓN

$$\dim = 2^n$$

No confundas número de qubits con número de amplitudes.

PASOS

1. Cuenta qubits.
2. Eleva 2 a esa potencia.
3. Enumera si es necesario.

¿Cuántas amplitudes tiene un estado de 4 qubits?

SOLUCIÓN

$$2^4 = 16.$$

Medir en la base computacional selecciona una cadena binaria con probabilidad igual al cuadrado de su amplitud.

NOTACIÓN

$$\mathbb{P}(x) = |a_x|^2$$

La medición devuelve una cadena, no una amplitud.

PASOS

1. Localiza amplitud a_x .
2. Calcula a_x^2 .
3. Interpreta como probabilidad del resultado x .

Para $|\psi\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$, calcula $\mathbb{P}(11)$.

SOLUCIÓN

$$\mathbb{P}(11) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Al medir un registro completo, Qiskit llena el registro clásico correspondiente. La cadena impresa sigue el orden clásico de visualización.

NOTACIÓN

```
qc.measure(q, c)
```

Lee índices y salida impresa por separado.

PASOS

1. Identifica estado físico.
2. Identifica mapeo qubit-bit.
3. Traduce a cadena mostrada.

Si $q_0 = 1$ y $q_1 = 0$, ¿qué cadena se muestra para dos bits?

SOLUCIÓN

La cadena usual es 01, porque se muestra como c_1c_0 .

Las compuertas X y H permiten preparar los cuatro estados básicos $|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle$ desde $|0\rangle$.

NOTACIÓN

$$|0\rangle \xrightarrow{X} |1\rangle, \quad |0\rangle \xrightarrow{H} |+\rangle, \quad |0\rangle \xrightarrow{X,H} |-\rangle$$

Escribe el estado objetivo y descompón en compuertas conocidas.

PASOS

1. Si quieres $|1\rangle$, aplica X .
2. Si quieres $|+\rangle$, aplica H .
3. Si quieres $|-\rangle$, aplica X luego H .

Prepara $|-\rangle$ desde $|0\rangle$.

SOLUCIÓN

$$|0\rangle \xrightarrow{X} |1\rangle \xrightarrow{H} |-\rangle.$$

Las probabilidades ideales se convierten en conteos esperados multiplicando por el número de disparos.

NOTACIÓN

$$E[\#x] = N\mathbb{P}(x)$$

Los conteos simulados pueden fluctuar si la probabilidad no es 0 o 1.

PASOS

1. Calcula probabilidades por Born.
2. Multiplica por shots.
3. Acepta fluctuación estadística.

Para $|+\rangle$ con 1000 disparos, estima conteos.

SOLUCIÓN

$$E[\#0] = 500, \quad E[\#1] = 500.$$

La descripción operativa de un qubit combina amplitudes, operaciones unitarias y medición probabilística.

NOTACIÓN

$$|\psi\rangle \xrightarrow{U} U|\psi\rangle \xrightarrow{\text{medición}} x \sim |a_x|^2$$

El cálculo mantiene amplitudes; la interpretación final usa probabilidades.

PASOS

1. Estado inicial.
2. Operación.
3. Estado final.
4. Medición por Born.

Calcula la probabilidad de 0 en $H|1\rangle$.

SOLUCIÓN

$$H|1\rangle = |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow \mathbb{P}(0) = \frac{1}{2}.$$

Los kets deben escribirse con delimitadores matemáticos para evitar confusión visual.

NOTACIÓN

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Usa siempre llaves en raíces y fracciones.

PASOS

1. Escribe $\sqrt{\quad}$, no $\sqrt{\quad}$ en material final.
2. Usa $|\cdot\rangle$ para estados.
3. Usa $|a|^2$ para probabilidades.

Reescribe de forma clara: $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\text{sqrt}2$.

SOLUCIÓN

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Estas fórmulas son las referencias mínimas disponibles para la resolución de ejercicios. La prioridad es identificar primero la convención de orden y después aplicar la regla algebraica correspondiente.

FÓRMULAS

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

$$\mathbb{P}(0) = \alpha^2, \quad \mathbb{P}(1) = \beta^2$$

$$H|0\rangle = |+\rangle, \quad H|1\rangle = |-\rangle$$

$$|\pm\rangle = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}$$