QMexico Summer School

QBronze 1.3
Operaciones con qubits

Operations on Real-Valued and Multiple Qubits

01 Junio 2026

Material final para estudiantes · Notación matemática en LaTeX

Ruta completa de la sesión

Slide 2

La sesión organiza los conceptos en una secuencia matemática progresiva.
Cada bloque introduce una definición, fija la convención de notación y resuelve ejercicios con pasos explícitos.
La convención común de las cinco presentaciones es usar vectores columna, producto tensorial de izquierda a derecha y amplitudes reales salvo que se indique lo contrario.

MAPA

1. Ortogonalidad
2. Rotaciones y reflexiones
3. Secuencias H, X, Z
4. CNOT
5. Orden de Qiskit
6. Control clásico y múltiple

Concepto · Operaciones ortogonales

En amplitudes reales, una operación cuántica válida preserva norma. Matricialmente esto significa que la matriz es ortogonal.

NOTACIÓN

$$U^T U = I$$

Método · Operaciones ortogonales

Verifica la condición sobre columnas.

PASOS

1. Calcula normas de columnas.
2. Calcula productos punto.
3. Acepta si son ortonormales.

Ejercicio resuelto · Operaciones ortogonales

¿Qué condición debe cumplir U para ser válida en el caso real?

SOLUCIÓN

$$U^T U = I.$$

Concepto · Columnas ortonormales

Slide 6

Una matriz real preserva norma si sus columnas son vectores unitarios mutuamente ortogonales.

NOTACIÓN

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$$

Método · Columnas ortonormales

Slide 7

Esta prueba evita multiplicar toda la matriz si es pequeña.

PASOS

1. Norma columna 1.
2. Norma columna 2.
3. Producto punto entre columnas.

Ejercicio · Columnas ortonormales

Verifica $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Cada columna tiene norma 1 y producto punto $\frac{1}{2}(1-1) = 0$. Entonces $H^T H = I$.

Concepto · Rotaciones

Slide 9

Una rotación real mueve un vector alrededor del círculo unitario sin cambiar su longitud.

NOTACIÓN

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Método · Rotaciones

El nuevo ángulo se obtiene sumando el ángulo de rotación.

PASOS

1. Escribe $|\psi\rangle = (\cos\phi, \sin\phi)^T$.
2. Aplica $R(\theta)$.
3. Resultado: $(\cos(\phi+\theta), \sin(\phi+\theta))^T$.

Ejercicio · Rotaciones

Slide 11

Rota $|0\rangle$ por 120° en el plano real.

SOLUCIÓN

$$R(2\pi/3)\,|0\rangle = \begin{bmatrix}\cos(2\pi/3)\\ \sin(2\pi/3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{bmatrix}.$$

Concepto · Qiskit y R_y

Slide 12

En Qiskit, la compuerta $R_y(\varphi)$ produce amplitudes $\cos(\varphi/2)$ y $\sin(\varphi/2)$ desde $|0\rangle$.

NOTACIÓN

$$R_y(\varphi)\,|0\rangle = \cos(\varphi/2)\,|0\rangle + \sin(\varphi/2)\,|1\rangle$$

Método · Qiskit y R_y

Para rotar el ángulo geométrico θ, se usa $\varphi = 2\theta$.

PASOS

1. Convierte grados a radianes.
2. Dobla el ángulo para R_y.
3. Escribe la línea sin espacios innecesarios.

Ejercicio · Qiskit y R_y

¿Qué código rota un qubit 120°?

SOLUCIÓN

$120^\circ = 2\pi/3$, por tanto $\varphi = 4\pi/3$. Código:

```
qc.ry(2*2*pi/3,q[0]).
```

Concepto · Reflexiones

Una reflexión preserva norma y cambia orientación.
En el plano real, las compuertas X, Z y H pueden verse como reflexiones.

NOTACIÓN

$$\text{reflexión } S \Rightarrow S^2 = I$$

Método · Reflexiones

Distingue rotación y reflexión por determinante y por comportamiento al cuadrado.

PASOS

1. Calcula S^2.
2. Si $S^2 = I$, puede ser reflexión.
3. Una rotación general no cumple $R(\theta)^2 = I$.

Ejercicio · Reflexiones

Marca una afirmación verdadera sobre reflexiones.

SOLUCIÓN

El cuadrado de una reflexión es la identidad:

$$S^2 = I.$$

QM Q

Concepto · Hadamard no es rotación

Slide 18

Hadamard preserva norma, pero en el plano real es una reflexión, no una rotación pura.

NOTACIÓN

$$H^2 = I, \qquad \det(H) = -1$$

Método · Hadamard no es rotación

Slide 19

La determinante negativa indica cambio de orientación.

PASOS

1. Calcula H^2.
2. Calcula $\det(H)$.
3. Concluye que es reflexión.

Ejercicio · Hadamard no es rotación

¿Hadamard es operador de rotación?

SOLUCIÓN

No. Como $\det(H) = -1$, Hadamard es reflexión en el plano real.

Concepto · Compuerta Z

La compuerta Z deja $|0\rangle$ igual y cambia el signo de $|1\rangle$.

NOTACIÓN

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Z|0\rangle = |0\rangle, \quad Z|1\rangle = -|1\rangle$$

Método · Compuerta Z

Slide 22

Z no cambia probabilidades de una medición inmediata, pero sí cambia interferencia posterior.

PASOS

1. Localiza amplitud de $|1\rangle$.
2. Multiplica esa amplitud por -1.
3. Conserva la amplitud de $|0\rangle$.

Ejercicio · Compuerta Z

Aplica Z a $|+\rangle$.

SOLUCIÓN

$$Z\,|+\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = |-\rangle\,.$$

Concepto · Secuencia $HZH\,|0\rangle$

Slide 24

Las compuertas se aplican de derecha a izquierda sobre el ket. En un circuito se leen de izquierda a derecha en el tiempo, pero algebraicamente el operador más cercano al ket actúa primero.

NOTACIÓN

$$HZH\,|0\rangle$$

Método · Secuencia $HZH\,|0\rangle$

Evalúa una compuerta por línea.

PASOS

1. $H\,|0\rangle = |+\rangle$.
2. $Z\,|+\rangle = |-\rangle$.
3. $H\,|-\rangle = |1\rangle$.

Ejercicio · Secuencia $HZH\,|0\rangle$

Calcula $HZH\,|0\rangle$.

SOLUCIÓN

$$HZH\,|0\rangle = H(Z\,|+\rangle) = H\,|-\rangle = |1\rangle\,.$$

Concepto · Secuencia HXH

La conjugación por Hadamard intercambia X y Z: $HXH = Z$ y $HZH = X$.

NOTACIÓN

$$HXH = Z, \qquad HZH = X$$

Método · Secuencia HXH

Slide 28

Usa estas identidades para simplificar secuencias.

PASOS

1. Agrupa HXH si aparece.
2. Sustituye por Z.
3. Aplica Z al estado.

Ejercicio · Secuencia HXH

Calcula $HXH\,|0\rangle$.

SOLUCIÓN

$$HXH\,|0\rangle = Z\,|0\rangle = |0\rangle\,.$$

Concepto · Ángulo entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$

En la representación real, $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son vectores ortogonales en el plano.

NOTACIÓN

$$\langle 0|1\rangle = 0 \Rightarrow \angle(|0\rangle, |1\rangle) = 90^\circ$$

Método · Ángulo entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$

Usa producto punto para determinar ortogonalidad.

PASOS

1. Escribe vectores columna.
2. Calcula producto punto.
3. Producto cero implica ángulo recto.

Ejercicio · Ángulo entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$

Calcula el ángulo entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

SOLUCIÓN

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 90^\circ.$$

Concepto · Dimensión de varios qubits

Slide 33

Un sistema de n qubits requiere 2^n amplitudes en la base computacional.

NOTACIÓN

$$\dim = 2^n$$

Método · Dimensión de varios qubits

La dimensión crece exponencialmente con el número de qubits.

PASOS

1. Cuenta qubits.
2. Calcula 2^n.
3. Ese es el tamaño del vector de estado.

Ejercicio resuelto · Dimensión de varios qubits

¿Dimensión para 5 qubits?

SOLUCIÓN

$$2^5 = 32.$$

Concepto · CNOT cuántico

CNOT actúa sobre estados base igual que en el caso clásico, pero por linealidad actúa sobre superposiciones.

NOTACIÓN

$$\mathrm{CNOT}\,|a, b\rangle = |a, b \oplus a\rangle$$

Método · CNOT cuántico

Slide 37

Aplica la regla a cada término de la superposición.

PASOS

1. Separa términos.
2. Aplica CNOT a cada ket base.
3. Conserva coeficientes.

Ejercicio · CNOT cuántico

Calcula CNOT sobre $\frac{|01\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$ con primer qubit como control.

SOLUCIÓN

$$|01\rangle \to |01\rangle\,, \qquad |11\rangle \to |10\rangle$$
$$\Rightarrow \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Todas las compuertas cuánticas actúan linealmente: se aplican término por término a una superposición.

NOTACIÓN

$$U(a\,|x\rangle + b\,|y\rangle) = aU\,|x\rangle + bU\,|y\rangle$$

Método · Linealidad

No calcules probabilidades antes de terminar las compuertas.

PASOS

1. Mantén amplitudes.
2. Aplica U a cada base.
3. Reagrupa términos.

Ejercicio · Linealidad

Slide 41

Aplica X al estado $a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$.

SOLUCIÓN

$$X(a\,|0\rangle + b\,|1\rangle) = a\,|1\rangle + b\,|0\rangle = b\,|0\rangle + a\,|1\rangle\,.$$

Concepto · Producto tensorial de compuertas

Slide 42

Si una compuerta actúa sólo sobre un qubit de un sistema, se entiende que identidad actúa sobre los demás.

NOTACIÓN

$$H \text{ en primer qubit} = H \otimes I$$

Método · Producto tensorial de compuertas

Especifica el qubit antes de escribir el producto tensorial.

PASOS

1. Identifica qubit afectado.
2. Escribe U en ese lugar.
3. Escribe I en los demás.

Ejercicio · Producto tensorial de compuertas

Slide 44

En dos qubits, aplica H al primer qubit de $|00\rangle$.

SOLUCIÓN

$$(H \otimes I)\,|00\rangle = \frac{|00\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}.$$

QM Q

Concepto · Orden de Qiskit

En Qiskit, $q[0]$ corresponde al bit menos significativo en la cadena de salida. Por eso aplicar H a $q[0]$ desde $|00\rangle$ produce $|00\rangle$ y $|01\rangle$ en la visualización usual.

NOTACIÓN

$$H \text{ en } q_0 : \quad \frac{|00\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}$$

Método · Orden de Qiskit

Distingue orden matemático declarado y orden de impresión de Qiskit.

PASOS

1. Si el objetivo usa convención Qiskit, lee q_0 como derecha.
2. Para superponer 00 y 01, aplica H a q_0.

Ejercicio · Orden de Qiskit

Slide 47

¿Qué línea produce $\frac{|00\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}}$ desde $|00\rangle$ en Qiskit?

SOLUCIÓN

```
qc.h(0)
```

Concepto · Simuladores

Distintos simuladores entregan objetos distintos: estado, conteos o unidad total del circuito.

NOTACIÓN

$$\text{statevector} \neq \text{unitary} \neq \text{counts}$$

Método · Simuladores

Slide 49

Elige el simulador según la salida que necesitas.

PASOS

1. Estado final: statevector.
2. Matriz del circuito: unitary.
3. Resultados de medición: AerSimulator con shots.

Ejercicio · Simuladores

¿Un simulador de matriz unitaria devuelve el vector de estado actual?

SOLUCIÓN

No necesariamente.
Devuelve la matriz unitaria total del circuito, no los conteos ni el estado medido.

Concepto · No se consulta un qubit con if

Un qubit no puede evaluarse directamente con una condición clásica como si fuera un bit ordinario. Debe medirse para producir información clásica.

NOTACIÓN

`if(q[0]==1)` no es una lectura cuántica válida

Método · No se consulta un qubit con if

Slide 52

Para condicionar clásicamente, mide primero y usa el bit clásico resultante.

PASOS

1. Mide el qubit.
2. Guarda resultado en bit clásico.
3. Usa operación condicionada sobre ese registro clásico.

Ejercicio · No se consulta un qubit con if

Slide 53

¿Puede revisarse el valor de un qubit con `if(q[0]==1)`?

SOLUCIÓN

No. Se requiere medición y control clásico posterior.

Concepto · Control por estado cero

Slide 54

Una compuerta controlada por 0 puede implementarse rodeando el control con compuertas X.

NOTACIÓN

$$\text{control en } 0: \quad X\ \mathrm{control\ en}\ 1\ X$$

Método · Control por estado cero

Slide 55

Transforma temporalmente el cero en uno para usar la compuerta controlada estándar.

PASOS

1. Aplica X al control.
2. Aplica la compuerta controlada usual.
3. Aplica X de nuevo al control.

Ejercicio · Control por estado cero

¿Es posible aplicar NOT si un qubit de control está en estado 0?

SOLUCIÓN

Sí. Se implementa con X antes y después del control estándar.

Concepto · Control doble

Una NOT controlada por dos qubits es la compuerta Toffoli o CCNOT.
Es posible y reversible.

NOTACIÓN

$$\mathrm{CCX}(a, b, c) = (a, b, c \oplus ab)$$

Método · Control doble

La compuerta actúa sobre el objetivo sólo si ambos controles valen 1.

PASOS

1. Revisa primer control.
2. Revisa segundo control.
3. Si ambos son 1, invierte objetivo.

Ejercicio · Control doble

¿Es imposible aplicar NOT controlada por dos qubits?

SOLUCIÓN

No. Es posible mediante Toffoli:

$$\mathrm{CCX}.$$

Concepto · Cambiar paridad de Bell

Slide 60

Una compuerta X sobre un qubit de un estado Bell correlacionado cambia los resultados permitidos de iguales a opuestos.

NOTACIÓN

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{X \text{ en un qubit}} \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

Método · Cambiar paridad de Bell

Aplica X al qubit correcto usando la convención de orden.

PASOS

1. Identifica los resultados no deseados.
2. Aplica X a un qubit para cambiar paridad.
3. Verifica que queden sólo cadenas opuestas.

Ejercicio · Cambiar paridad de Bell

Slide 62

Si se desea eliminar 00 y 11 de un Bell correlacionado en Qiskit,
¿qué operación puede usarse?

SOLUCIÓN

Aplicar X a un qubit, por ejemplo

```
qc2.x(q2[1]).
```

Concepto · Transformar Bell con X

Aplicar X al primer qubit cambia $|00\rangle \leftrightarrow |10\rangle$ y $|11\rangle \leftrightarrow |01\rangle$.

NOTACIÓN

$$(X \otimes I)\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}$$

Método · Transformar Bell con X

Slide 64

Sigue cada término por separado.

PASOS

1. $|00\rangle \to |10\rangle$.
2. $|11\rangle \to |01\rangle$.
3. Conserva $1/\sqrt{2}$.

Ejercicio · Transformar Bell con X

Slide 65

Obtén $\frac{|10\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}}$ desde $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$.

SOLUCIÓN

Aplica X al primer qubit:

$$(X \otimes I)\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Concepto · Hadamard en 3 qubits

Si se aplica H sólo a un qubit de un sistema de tres, los demás evolucionan como si se aplicara identidad.

NOTACIÓN

$$H \text{ en } q_0 = H \otimes I \otimes I \quad \text{según orden declarado}$$

Método · Hadamard en 3 qubits

Slide 67

Nunca asumas que H se aplica a todos los qubits si el circuito indica uno solo.

PASOS

1. Identifica la línea con H.
2. Escribe identidad en las otras líneas.
3. Expande sólo el qubit afectado.

Ejercicio · Hadamard en 3 qubits

Slide 68

¿Qué ocurre si se aplica H a un solo qubit de un circuito de 3 qubits?

SOLUCIÓN

Sólo ese qubit se superpone. Los demás no cambian, como si se aplicara I a cada uno.

QM Q

Concepto · Medición parcial

Medir un subconjunto de qubits produce información clásica de esos qubits y puede cambiar el estado restante.

NOTACIÓN

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{medición parcial}} \text{resultado clásico} + \text{estado condicional}$$

Método · Medición parcial

Slide 70

Distingue resultado medido y estado no medido restante.

PASOS

1. Separa qubits medidos.
2. Calcula probabilidades por suma de amplitudes cuadradas compatibles.
3. Normaliza el estado restante si se requiere.

Ejercicio · Medición parcial

Slide 71

Si $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$ mide primer qubit como 0, ¿qué queda en el segundo?

SOLUCIÓN

Queda $|0\rangle$ con probabilidad condicional 1.

Concepto · Circuitos por capas

Slide 72

Para evaluar circuitos, marca cortes de tiempo y calcula el estado tras cada capa de compuertas.

NOTACIÓN

$$|\psi_0\rangle \to |\psi_1\rangle \to |\psi_2\rangle \to \cdots$$

Método · Circuitos por capas

Slide 73

Una capa contiene operaciones que se aplican antes de pasar a la siguiente.

PASOS

1. Escribe estado inicial.
2. Aplica primera capa.
3. Simplifica.
4. Repite hasta medición.

Evalúa el inicio de H seguido de Z sobre $|0\rangle$.

SOLUCIÓN

$$|\psi_1\rangle = H\,|0\rangle = |+\rangle\,, \qquad |\psi_2\rangle = Z\,|+\rangle = |-\rangle\,.$$

Concepto · Probabilidad final

Slide 75

Después de todas las operaciones, las probabilidades se calculan con los cuadrados de amplitudes finales.

NOTACIÓN

$$\mathbb{P}(x) = |\langle x|\psi_{\text{final}}\rangle|^2$$

Método · Probabilidad final

No midas mentalmente antes de terminar, salvo que el circuito tenga una medición explícita.

PASOS

1. Obtén $|\psi_{\text{final}}\rangle$.
2. Identifica amplitud de x.
3. Eleva al cuadrado.

Ejercicio · Probabilidad final

Para $|\psi\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$, calcula $\mathbb{P}(11)$.

SOLUCIÓN

La amplitud de $|11\rangle$ es 0, por tanto $\mathbb{P}(11) = 0$.

Concepto · Control de lectura algebraica

En expresiones como $HZH|0\rangle$, la compuerta más cercana al ket actúa primero. En diagramas, el tiempo avanza de izquierda a derecha.

NOTACIÓN

$$ABC|\psi\rangle = A(B(C|\psi\rangle))$$

Método · Control de lectura algebraica

La diferencia entre notación algebraica y diagrama debe explicitarse.

PASOS

1. En fórmula: derecha a izquierda.
2. En circuito: izquierda a derecha.
3. Une ambas escribiendo estados intermedios.

Ejercicio · Control de lectura algebraica

¿Cuál operación se aplica primero en $HZH|0\rangle$?

SOLUCIÓN

El H de la derecha, porque está junto a $|0\rangle$.

Concepto · Matrices X, Z y H

Slide 81

Las compuertas básicas de un qubit se manipulan como matrices reales. Para resolver ejercicios, conviene recordar su acción sobre la base antes de multiplicar matrices largas.

NOTACIÓN

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Método · Matrices X, Z y H

Slide 82

Aplica primero la acción conocida en kets base; si hay duda, usa multiplicación matriz-vector.

PASOS

1. X intercambia 0 y 1.
2. Z cambia el signo de $|1\rangle$.
3. H cambia entre base computacional y base $\pm$.

Ejercicio · Matrices X, Z y H

Calcula $Z\left|1\right\rangle$.

SOLUCIÓN

$$Z\left|1\right\rangle = -\left|1\right\rangle.$$

Concepto · CNOT y superposición

Cuando CNOT actúa sobre una superposición, la compuerta se aplica a cada término. Las amplitudes no se recalculan hasta después de transformar todos los kets.

NOTACIÓN

$$\mathrm{CNOT} \sum_x a_x |x\rangle = \sum_x a_x \mathrm{CNOT} |x\rangle$$

Método · CNOT y superposición

Slide 85

La linealidad es la herramienta central para evitar errores.

PASOS

1. Expande el estado.
2. Aplica CNOT término por término.
3. Conserva coeficientes.
4. Reagrupa.

Ejercicio · CNOT y superposición

Slide 86

Aplica CNOT a $\frac{|00\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}$ con primer qubit como control.

SOLUCIÓN

$$|00\rangle \to |00\rangle\,, \qquad |10\rangle \to |11\rangle \Rightarrow \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Concepto · Identidad en qubits no afectados

Slide 87

Una compuerta dibujada en un solo cable no modifica los demás qubits.
Algebraicamente, eso equivale a tensorizar con identidades.

NOTACIÓN

$$U \text{ en un qubit} \Rightarrow I \otimes \cdots \otimes U \otimes \cdots \otimes I$$

Método · Identidad en qubits no afectados

Slide 88

Esta regla resuelve ejercicios donde se pregunta qué ocurre al aplicar una compuerta sólo a uno de varios qubits.

PASOS

1. Localiza el cable afectado.
2. Escribe U en ese factor.
3. Escribe I en todos los demás.

Ejercicio · Identidad en qubits no afectados

Si se aplica H sólo al segundo qubit de tres, ¿qué pasa con los otros?

SOLUCIÓN

No cambian. Algebraicamente reciben identidad.

Formulario final del módulo

Slide 90

Estas fórmulas son las referencias mínimas que deben quedar disponibles durante la resolución de ejercicios. La prioridad es identificar primero la convención de orden y después aplicar la regla algebraica correspondiente.

FÓRMULAS

$$U^T U = I$$

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$HZH = X, \quad HXH = Z$$

$$\mathrm{CNOT}\,|a, b\rangle = |a, b \oplus a\rangle$$

$$\dim = 2^n$$